Гальчевський Василь
Науковий керівник - Франовський А. Ц.,
кандидат фізико-математичних наук, доцент

ЗАСТОСУВАННЯ ДЕРИВАЦІЙНИХ ФОРМУЛ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ З ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

У період розвитку інформаційного суспільства особливої актуальності набуває проблема застосування диференціальної геометрії в різних галузях сучасного життя. Одним з основних питань, які розглядає диференціальна геометрія – це питання, яке стосується теорії поверхонь, зокрема, вивчення та дослідження рівнянь поверхонь, які ще називають дериваційними формулами Гауса і Вейнгартена [1].

Дериваційні формули виражають частинні похідні векторів $\overrightarrow{r_{uu}}$, $\overrightarrow{r_{uv}}$, $\overrightarrow{r_{vv}}$, $\overrightarrow{n_u}$, $\overrightarrow{n_v}$ через самі ці вектори $\overrightarrow{r_u}$, $\overrightarrow{r_v}$, $\vec{n}$. щоб виразити будь-який з цих векторів через базисні вектори за допомогою коефіцієнтів розтягу необхідно звернути увагу на зв'язок основних рівнянь поверхні з першою та другою квадратичною формами [2].

Нехай $\vec{r} = \vec{r}(s)$ векторно-параметричне рівняння кривої γ, віднесеної до натурального параметра s. Позначимо через $\vec{\tau}(s)$, $\vec{v}(s)$, $\vec{\beta}(s)$ одиничні вектори дотичної, головної нормалі і бінормалі кривої γ.

Формули: $\frac{d\vec{\tau}}{d\vec{s}} = k\vec{v}$, $\frac{d\vec{v}}{d\vec{s}} = -k\vec{\tau} + x\vec{\beta}$, (1) $\frac{d\vec{\beta}}{d\vec{s}} = -x\vec{\beta}$, які виражають похідні $\frac{d\vec{r}}{d\vec{s}}$, $\frac{d\vec{\tau}}{d\vec{s}}$, $\frac{d\vec{v}}{d\vec{s}}$, $\frac{d\vec{\beta}}{d\vec{s}}$ через вектори $\vec{\tau}$, $\vec{v}$, $\vec{\beta}$ називаються формулами Френе (дериваційними рівняннями кривої), де k, x – відповідно кривина і скрут кривої. Поклавши в рівняння (1) $x = 0$ дістанемо формули Френе для плоскої кривої [4, с.16].

Розглянемо декілька прикладів, які розв'язуються за допомогою дериваційних формул.

Задача 1: Довести, що коли між точками двох кривих γ_1 і γ_2 можна встановити таку відповідність, при якій у відповідних точках цих кривих дотичні паралельні, то головні нормалі та бінормалі цих кривих теж паралельні.

Доведення: Нехай $\vec{r} = \vec{r}(s)$ і $\vec{R} = \vec{R}(\sigma)$ рівняння кривих γ_1 і γ_2, віднесених до натуральних параметрів s і σ.

Позначимо $\vec{\tau}_1$, $\vec{v}_1$, $\vec{\beta}_1$ і $\vec{\tau}_2$, $\vec{v}_2$, $\vec{\beta}_2$ – орти триграників Френе кривих γ_1 і γ_2. Оскільки між точками цих кривих встановлена взаємооднозначна відповідність, то, не обмежуючи загальність, можемо вважати, що $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}(s)$.

Беручи до уваги, що у відповідних точках кривих γ_1 і γ_2. Дотичні паралельні, маємо: $\vec{\tau_1}(s) = \pm\vec{\tau_2}(\sigma(s))$ (2).

Тому $[\vec{\tau_1}(s)\vec{\tau_2}(\sigma(s))] = 0$.

Продиференціювавши цю тотожність по s, дістанемо:

$[k_1\vec{v_1}(s)\vec{\tau_2}(\sigma(s))] + [\vec{\tau_1}(s)k_2\vec{v_2}(\sigma(s))]\frac{d\sigma}{ds} = \vec{0}$.

Звідси, враховуючи рівність (2), знаходимо:

$\pm k_1[\vec{v_1}(s)\vec{\tau_1}(s)] + k_2[\vec{\tau_2}(\sigma(s))\vec{v_2}(\sigma(s))]\frac{d\sigma}{ds} = \vec{0}$ (3).

Через те, що $[\vec{\tau_1}\vec{v_1}] = \vec{\beta_1}$, $[\vec{\tau_2}\vec{v_2}] = \vec{\beta_2}$, рівність (3) можна записати так: $k_1\vec{\beta_1} \pm \vec{k_2}\frac{d\sigma}{ds}\vec{\beta_2} = \vec{0}$, звідси слідує, що $\vec{\beta}_1 \parallel \vec{\beta}_2$.

Оскільки $\vec{\tau}_1 \parallel \vec{\tau}_2$, $\vec{\beta}_1 \parallel \vec{\beta}_2$, то $|\vec{\beta}_1\vec{\tau}_1| \parallel |\vec{\beta}_2\vec{\tau}_2|$, тобто $\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$ [4, с. 16–17].

Задача 2: Довести, що коли всі стичні площини кривої проходять через одну й ту саму точку, то така крива плоска.

Розв'язування: Виберемо за початок координат точку M_0. Тоді радіус-вектори $\vec{r}(t)$ точок даної кривої лежатимуть у стичних площинах цієї кривої, а тому виконуватиметься таке співвідношення $(\vec{\beta}(t)\vec{r}(t)) = 0$, (4), де $\vec{\beta}(t)$ – орт бінормалі.

$$(\vec{\beta}(t)\vec{r}\,'(t)) = 0 \quad (5) \quad \text{і} \quad (\vec{\beta}(t)\vec{r}\,''(t)) = 0 \quad (6)$$

Оскільки вектори $\vec{r}\,'(t)$ та $\vec{r}\,''(t)$ належать стичній площині. Про диференціювавши тотожності (4) і (6) по t і взявши при цьому до уваги (5) і (6) дістанемо:

$$(\vec{\beta}\,'(t), \vec{r}(t)) = 0 \quad (7) \quad \text{і} \quad (\vec{\beta}\,'(t), \vec{r}\,'(t)) = 0 \quad (8).$$

Крім того:

$$(\vec{\beta}\,'(t), \vec{\beta}(t)) = 0 \quad (9)$$

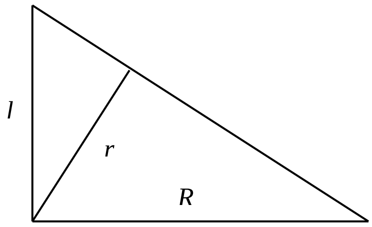
Через те, що вектори $\vec{r}(t)$, $\vec{r}\,'(t)$, $\vec{\beta}\,'(t)$ – некомпланарні, з рівностей (7–9) слідує, що $\vec{\beta}\,'(t) = \vec{0}$, тобто $\vec{\beta} = \vec{\beta_0} = \overrightarrow{const}$.

Тоді рівність (4) запишеться так: $(\vec{\beta}_0, \vec{r}(t)) = 0$, а це й означає, що крива, яка розглядається є плоскою [4, с. 17–18].

Задача 3: Обчислити геодезичну кривину малого кола на сфері [3].

Розв'язування: Дотичні площини до сфери вздовж малого кола обертають конус обертання. Конус і сфера дотикаються один до одного по малому колу, і, значить, геодезичні кривини кола як кривої на сфері та конусі співпадають. Але конус локально ізометричний площині, а геодезична крива при ізометричних відображеннях не змінюється, оскільки геодезична кривина виражається через коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні. Розгорнемо конус на площину. Мале коло перейде в плоску криву, кривина якої дорівнює шуканій кривині малого кола на сфері.

Нехай радіус сфери – радіус малого кола як плоскої кривої, l – відстань від вершини конуса до точки малого кола (див. рис.1).



Тоді $\frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{l}{R}$, звідки геодезична кривина k_g малого кола на сфері $k_g = \frac{1}{l} = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{rR}$. Якщо $r = R$

,

то $k_g = 0$ тобто геодезична кривина великих кіл на сфері дорівнює нулю.

Рис. 1.

Якщо $r \to 0$, то $k_g \to \infty$.

Задача 4: Знайти Гауссову кривину поверхні [3].

Розв'язування: Нехай задана перша квадратична форма поверхні $I = du^2 + (u^2 + b^2)dv^2$. Знайдемо Гауссову кривину поверхні за формулою:

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E_u}{\sqrt{EG}}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)\right].$$ Маємо $E = 1$, $E_v = 0$, $G = u^2 + b^2$, $G_u = 2u$;

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{u^2 + b^2}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{2u}{\sqrt{u^2 + b^2}}\right] = -\frac{b^2}{\left(u^2 + b^2\right)^2}.$$

Отже, Гауссова кривина дорівнює $-\frac{b^2}{\left(u^2 + b^2\right)^2}$.

В результаті проведеного аналізу наукової літератури з диференціальної геометрії та в ході розв'язання вище вказаних задач, можна зробити висновок, що дериваційні формули – це основні формули в теорії поверхонь, а їх вивчення пов'язане з багатьма об'єктами внутрішньої геометрії поверхні, які сприяють розвитку абстрактно-логічного мислення та просторової уяви.

Література

1. Дубровин Б. А. Современная геометрия. Методы и приложения / Б. А. Дубовин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. – М. : Наука, 1986. – 760 с.
2. Кованцов М.І. Диференціальна геометрія : методичні вказівки до вивчення курсу / М. І. Кованцов. – Харків, 1968. – 82 с.
3. Феденко А. С. Сборник задач по дифференциальной геометрии / А. С. Феденко. – [2-е изд.]. – М. : Просвещение, 1979. – 272 с.
4. Франовський А. Ц. Диференціальна геометрія : практикум з розв'язування задач / А. Ц. Франовський. – Житомир : Поліграфічний центр ЖДПУ, 2001. – 64 с.